ΦΑ4 Πραγματικοί αριθμοί : Ασκήσεις και Φύλλα εργασίας

Άρρητοι αριθμοί - Φύλλο εργασίας

Δραστηριότητα : Πού είναι ο αριθμός $\sqrt{7}$;

Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο ο αριθμός $\sqrt{7}$ αντιστοιχεί στον θετικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό 7 . Επομένως αναζητούμε τον θετικό αριμό x για τον οποίο ισχύει $x^2 = 7$

<table>
<tr>
<td>Βήμα 1</td>
<td>Στην δεύτερη στήλη του διπλανού πίνακα δίνονται τα τετράγωνα των αριθμών της πρώτης στήλης.
α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε την διπλή ανισότητα : .... < $\sqrt{7}$ < ....</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>x^2</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>5</td><td>25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>36</td></tr>
<tr><td>7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>8</td><td>64</td></tr>
<tr><td>9</td><td>81</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Βήμα 2</td>
<td>Στην δεύτερη στήλη του διπλανού πίνακα δίνονται τα τετράγωνα των αριθμών της πρώτης στήλης.
α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε την διπλή ανισότητα : .... < $\sqrt{7}$ < ....

γ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι :

(με έλλειψη) $\sqrt{7}$ = (με υπερβολή) $\sqrt{7}$ =</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>x^2</th></tr>
<tr><td>2,0</td><td>4,00</td></tr>
<tr><td>2,1</td><td>4,41</td></tr>
<tr><td>2,2</td><td>4,84</td></tr>
<tr><td>2,3</td><td>5,29</td></tr>
<tr><td>2,4</td><td>5,76</td></tr>
<tr><td>2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td>2,6</td><td>6,76</td></tr>
<tr><td>2,7</td><td>7,29</td></tr>
<tr><td>2,8</td><td>7,84</td></tr>
<tr><td>2,9</td><td>8,41</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Βήμα 3

α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε την διπλή ανισότητα : .... < $\sqrt{7}$ < ....

γ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι :

(με έλλειψη) $\sqrt{7}$ = (με υπερβολή) $\sqrt{7}$ =

x	x^2
2,60	6,7600
2,61	6,8121
2,62	6,8644
2,63	6,9169
2,64	6,9696
2,65	7,0225
2,66	7,0756
2,67	7,1289
2,68	7,1824
2,69	7,2361

Βήμα 4

α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε την διπλή ανισότητα : .... < $\sqrt{7}$ < ....

γ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι :

(με έλλειψη) $\sqrt{7}$ = (με υπερβολή) $\sqrt{7}$ =

x	x^2
2,640	6,969600
2,641	6,974881
2,642	6,980164
2,643	6,985449
2,644	6,990736
2,645	6,996025
2,646	7,001316
2,647	7,006609
2,648	7,011904
2,649	7,017201

Βήμα 5

α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε την διπλή ανισότητα : .... < $\sqrt{7}$ < ....

γ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι :

(με έλλειψη) $\sqrt{7}$ = (με υπερβολή) $\sqrt{7}$ =

x	x^2
2,6450	6,99602500
2,6451	6,99655401
2,6452	6,99708304
2,6453	6,99761209
2,6454	6,99814116
2,6455	6,99867025
2,6456	6,99919936
2,6457	6,99972849
2,6458	7,00025764
2,6459	7,00078681

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ : (Συνεχίζοντας επ'άπειρον την παραπάνω διαδικασία)

Α. Δεν υπάρχει δεκαδικός αριθμός x (με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων) τέτοιος ώστε $x^2 = 7$. Δηλαδή ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι .... αριθμός.

Β. Οι άρρητοι αριθμοί είναι δεκαδικοί αριθμοί με .... δεκαδικά ψηφία τα οποία όμως δεν είναι ....

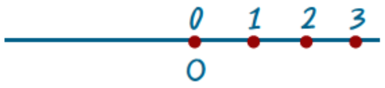
Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$,... είναι άρρητοι. Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π.

Σχόλιο:

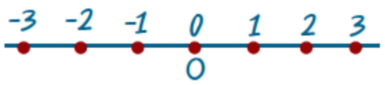
Τις τετραγωνικές ρίζες μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τη βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης ως εξής: Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα $\boxed{2}$ και $\boxed{\sqrt{\ }}$, οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία. Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαμε ειδικούς πίνακες.

Πραγματικοί αριθμοί

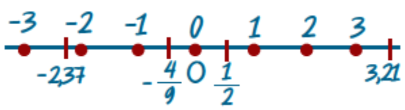
Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.



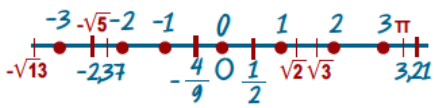
➤ Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία.
Στην αρχή Ο έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).



➤ Οι ακέραιοι αριθμοί: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... παριστάνονται πάλι με σημεία.
Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.



➤ Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός.
Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.



➤ Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.

Πραγματικοί αριθμοί

Ρητοί αριθμοί	Άρρητοι αριθμοί
2.3 , -4.5 , $4.\overline{7}$, $2.333...$, $\frac{5}{6}$, $-\frac{3}{4}$ **Ακέραιοι αριθμοί** $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ **Φυσικοί αριθμοί** $0, 1, 2, 3, ...$	$\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ℝ σχηματίζεται από την ένωση των συνόλων των ρητών αριθμών και των άρρητων αριθμών.

Τα σύνολα των ρητών και των άρρητων αριθμών είναι μεταξύ τους ξένα. Δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

ΦΑ4.1 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι:

$0{,}25$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{16}$, $-\sqrt{6}$, -2 , $-\dfrac{2}{5}$, -1 , $0{,}44444444...$, $3{,}1415926535...$

$(0{,}2)^3$, $\sqrt{\dfrac{25}{4}}$ είναι : α) πραγματικοί β) άρρητοι γ) ρητοί

ΦΑ4.2 α) Μεταξύ ποιών διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται ο αριθμός : α1) $\sqrt{5}$ α2) $\sqrt{90}$

β) Λύσε τις εξισώσεις : β1) $x^2 = 7$ β2) $x^2 = 9$ β3) $x^2 = -16$ β4) $x^2 = 0$

γ) Θυμίσου ότι , για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α , β ισχύει :

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta} \quad , \quad \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad , \quad \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$$

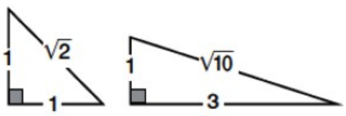
και στη συνέχεια υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων :

$\Gamma_1 = 14 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ $\Gamma_2 = \left(3\sqrt{10}\right)\left(5\sqrt{10}\right)$ $\Gamma_3 = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{2}}$ $\Gamma_4 = \dfrac{\sqrt{8}}{3}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{2}}$

Δραστηριότητα

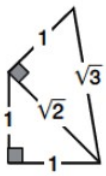
Γεωμετρικές κατασκευές άρρητων αριθμών με τη βοήθεια ορθογωνίων τριγώνων

1. Στα διπλανά σχήματα έχουμε κατασκευάσει ευθύγραμμα τμήματα μήκους $\sqrt{2}$ και $\sqrt{10}$: Στις πλευρές μιας ορθής γωνίας μετράμε πρώτα με το διαβήτη τα μήκη των κάθετων πλευρών και μετά φέρνουμε την υποτείνουσα.

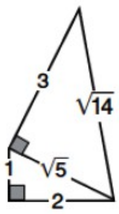


Ισχύουν: $1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$ και $1^2 + 3^2 = 10 = (\sqrt{10})^2$.
Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$ και $\sqrt{20}$; Ποιους άλλους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον τρόπο;

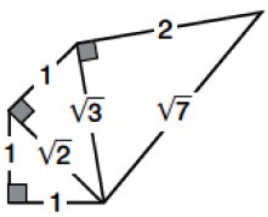
2. Πολλοί άρρητοι δε μπορούν να κατασκευαστούν με τον προηγούμενο τρόπο. Για παράδειγμα ο αριθμός $\sqrt{3}$ μπορεί να κατασκευαστεί μόνο αν χρησιμοποιήσουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα: Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, κατασκευάζουμε πρώτα όπως παραπάνω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 1, οπότε η υποτείνουσα είναι $\sqrt{2}$ και στη συνέχεια ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και $\sqrt{2}$, οπότε η υποτείνουσα είναι $\sqrt{3}$, γιατί $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$.



Παρομοίως στο διπλανό σχήμα έχουμε μια κατασκευή του αριθμού $\sqrt{14}$ (ισχύει $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = (\sqrt{14})^2$). Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ και $\sqrt{21}$; Ποιους άλλους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον τρόπο;



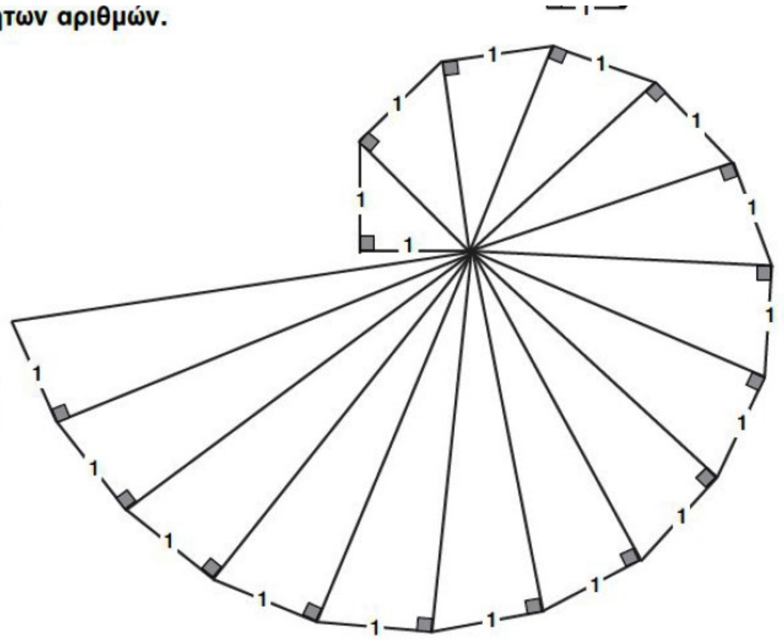
3. Για την κατασκευή ορισμένων άρρητων μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τρία ορθογώνια τρίγωνα! Για παράδειγμα, ο αριθμός $\sqrt{7}$ μπορεί να κατασκευαστεί όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Ισχύει $1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 7 = (\sqrt{7})^2$.



Η σπείρα των άρρητων αριθμών (φωτόδεντρο - αρχείο ggb)

4. Η σπείρα των άρρητων αριθμών.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε κατασκευάσει διαδοχικά ορθογώνια τρίγωνα σχηματίζοντας μια κυκλική διάταξη (σπείρα). Μπορείτε να υπολογίσετε τις υποτείνουσες των τριγώνων αυτών; Τι επιτυγχάνουμε με αυτή τη σπείρα;



Επιμέλεια : Μιχάλης Χατζάκης