

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ : ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ Α

A1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) $\sqrt{(-7)^2} = -7$

β) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

γ) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{3+5}$

δ) Η εξίσωση $\sqrt{x} = -2$ είναι αδύνατη

A2) Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α στην ισοδύναμή της που βρίσκεται στην στήλη Β .

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\sqrt{50}$ 2. $\sqrt{48}$ 3. $\sqrt{90} + \sqrt{9000}$ 4. $\sqrt{12} + \sqrt{27}$	α. $33\sqrt{10}$ β. $4\sqrt{3}$ γ. $5\sqrt{2}$ δ. $5\sqrt{3}$ ε. $\sqrt{9090}$ ζ. $\sqrt{39}$

A3) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) \frac{4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{6}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{15}{7}}} \quad \beta) (5-3\sqrt{2}) \cdot (4+7\sqrt{2})$$

A4) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους;

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{12}}$$

$$\beta) 3\sqrt{8}, \sqrt{72}, 2\sqrt{18}, 6\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$$

A5) Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι;

$$i) \alpha = \sqrt{8}, \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \gamma = 2\sqrt{2}, \delta = \frac{4}{\sqrt{2}}, \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma = \sqrt{\frac{2}{4}}$$

$$ii) \alpha = \sqrt{3} + \sqrt{3}, \beta = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}, \gamma = \sqrt{12}, \delta = \sqrt{3+3}, \varepsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3}$$

A6) Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδό 10 m^2 . Αν είναι x η μια πλευρά του ορθογωνίου, τότε η αλγεβρική παράσταση που παριστάνει την περίμετρο του ορθογωνίου είναι

A. $2x+20$ B. $2x + \frac{10}{x}$ Γ. $2x + 2(10-x)$ Δ. $2x + \frac{2x}{20}$ Ε. $2x + \frac{20}{x}$

A7) Για κάθε πραγματικό αριθμό x , η παράσταση $2x^3 + 4x^2$ είναι ίση με

A. $6x^5$ B. $8x^6$ Γ. $6x^6$ Δ. τίποτε από τα προηγούμενα

A8) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$2\alpha^4\beta - [7 - (\beta - 2\alpha^4\beta) + 3\alpha - (4\beta - 3\alpha)] \text{ , για } \alpha = -2 \text{ και } \beta = -3$$

A9) Να κάνετε τις πράξεις : α) $3x^2y - (5xy^2 + yx^2)$ β) $3x^2y \cdot (-5xy^2) \cdot (-yx^2)$

γ) $(-\frac{2}{3}x^2y) \cdot (-\frac{4}{3}xy^3) \cdot (-18x)$ δ) $(-\frac{2}{3}x^2y) : (-\frac{4}{3}xy^3\omega)$ ε) $(-9\alpha\beta^3\gamma)^2 : (-3\alpha^2\beta)^3$

A10) Να κάνετε τις πράξεις :

α) $-5x(2x-3) - 3x(2-3x)$ β) $(3x-2)(x^2 - 4x)(x-3)$ γ) $(3\alpha-4\beta)(-2\alpha+3\beta) - \alpha(\beta - 6\alpha) + 12\beta^2$

A11) Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή ;

A. $(2x-3y)^2 = 2x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + 3y^2$ B. $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (-3y) + (3y)^2$
Γ. $(2x-3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$ Δ. $(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

A12) Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή ;

A. $4x^2 - 1 = (4x - 1) \cdot (4x + 1)$ B. $4x^2 - 1 = (2x - 1)^2$
Γ. $4x^2 - 1 = (2x + 1) \cdot (1 - 2x)$ Δ. $4x^2 - 1 = (2x - 1) \cdot (2x + 1)$

A13) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές

ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) $(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{6}) = -1$ β) $(3x - 2y) \cdot (3x + 2y) = 3x^2 - 2y^2$

γ) $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - \frac{1}{x^2}$

A14) Αν $A = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ και $B = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : AB , A^2 και B^2

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ cm και $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ cm

γ) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή

A15) Να βρείτε τα αναπτύγματα : $A = (1 - x^2)^2$, $B = (2 - x^2)^3$ και $\Gamma = (\sqrt{2} - x^3)(\sqrt{2} + x^3)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : $6A + \Gamma = B$

A16) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) , αν είναι σωστές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες .

α) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3$

β) $(x + 2)(2 - x) = 4 - x^2$

γ) $(5x + 2y)(5x - 2y) = 25x^2 - 4y^2$

δ) $(\alpha - 5)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot (-5) + 5^2$

ε) $52^3 - 3 \cdot 52^2 \cdot 42 + 3 \cdot 52 \cdot 42^2 - 42^3 = 1000$

A17) Να κάνετε τις πράξεις : α) $(1 - 2\alpha)^3 - 8\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)$ β) $x(x - 1)^3 - (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

γ) $2x(1 - 2x)^2 - (2x - 3)^3 - 2x + 3$

A18) Να αποδείξετε ότι :

α) $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2 - (\alpha - \frac{1}{\alpha})^2 = 4$ β) $(\alpha + 2\beta)^2 - \alpha^2 = 4\beta(\alpha + \beta)$

γ) $(2x - y^2)^2 - (y^2 + 3x)(y^2 - 3x) = 13x^2 - 4xy^2$

A19) α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

β) Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α , β έχει διαγώνιο 10 και εμβαδόν 48.
Να υπολογίσετε την περίμετρο του.

A20) Στις παρακάτω παραστάσεις , οι πράξεις μπορούν να γίνουν με δύο τρόπους .
Μπορείτε να βρείτε τον πιο σύντομο τρόπο ;

$A = 9999^2 - 1$ $B = (2\sqrt{6} + 3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot (5\sqrt{6} - 3\sqrt{2}) + (5\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^2$

$\Gamma = 2,4^3 + 3 \cdot 2,4^2 \cdot 7,6 + 3 \cdot 2,4 \cdot 7,6^2 + 7,6^3$

A21) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες :

α) $5x^2 + 15xy - 10xw - 25x = 5x (\dots\dots\dots)$

β) $\alpha (x^3 + 2) - \beta(x^3 + 2) + (x^3 + 2) = (\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)$

γ) $25x^2 - 9 = (\dots\dots\dots - 3) (\dots\dots\dots + 3)$

δ) $16x^2 - 24x + 9 = (\dots\dots\dots)^2$

A22) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) , αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) $x^2(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)x^2$ β) $9 - 6\alpha + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2$ γ) $(x - 2)^2 = (2 - x)^2$

δ) $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) = (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)$ ε) $(\alpha - \beta)^3 = (\beta - \alpha)^3$ στ) $5 - \alpha - \beta = 5 - (\alpha - \beta)$

A23) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$A = x^4 - x^2$, $B = x^3 + 2x^2 - x - 2$ και $A - B$

A24) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $3x^3 + 15x - 4x^2 - 20$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $3x^3 + 15x = 4x^2 + 20$

A25) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $4x(x - 1) - x + 1$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $4x(x - 1) = x - 1$

A26) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $3x^3 - 12x$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $3x^3 - 12x = 0$

A27) α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2$

β) Αν $\alpha^3 + \beta^3 = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α , β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

A28) Αν $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων :

$A = 6x^2$ και $B = \sqrt{36x^4 + 12x^2 + 1}$

A29) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) $\frac{x^2 + 1}{x} = x + 1$ β) $\frac{(x+2)(x+1)}{4(x+1)} = \frac{x+2}{4}$ γ) $\frac{3x+y}{3x} = y$ δ) $\frac{x+2}{y+2} = \frac{x}{y}$
 ε) $\frac{x(x+1)}{x} = x+1$ στ) $\frac{x+2(x+1)}{4(x+1)} = \frac{x+2}{4}$ ζ) $\frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$

A30) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε κλάσμα της 1^{ης} γραμμής το αντίστοιχο του απλοποιημένο κλάσμα από τη 2^η γραμμή.

α) $\frac{x^2+x}{x}$, β) $\frac{x^2-x}{x-1}$, γ) $\frac{x^2-x}{x}$, δ) $\frac{x^2-x}{x^2-1}$

1. $\frac{x}{x+1}$, 2. $\frac{1}{x-1}$, 3. $x-1$, 4. $x+1$, 5. x

A31) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{1984^2+1984 \cdot 16}{996^2-16}$

A32) Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$A = \frac{2x^3-3x^2+4x-6}{4x^2-9}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε .

A33)

Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστή ή με (Λ) αν είναι λανθασμένη.

α) $\frac{x}{3} \cdot \frac{x+2}{y} = \frac{x \cdot x + 2}{3y}$, β) $\frac{7}{x} \cdot \frac{x}{x+4} = \frac{7}{x+4}$, γ) $\frac{1+\frac{2}{y}}{\frac{3}{x}} = \frac{1+2x}{3y}$

δ) $x : \frac{y}{\omega+1} = \frac{x \cdot \omega + 1}{y}$, ε) $\frac{\frac{5x}{\omega}}{\frac{y}{x}} = \frac{\omega y}{5x^2}$, στ) $\frac{x}{y} : \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x}$

A34) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\beta}$ β) $\frac{5}{x-1} - \frac{3}{1-x} = \frac{8}{x-1}$ γ) $\frac{(x-2)^2}{2-x} = x-2$ δ) $\frac{5-x}{(x-5)^3} = \frac{1}{(5-x)^2}$

A35) Να γίνουν οι πράξεις α) $\frac{x+1}{x^2-x} + \frac{1}{x} - 1$ β) $\frac{2}{x+4} \cdot \frac{x}{3} - \frac{1}{x^2-16}$

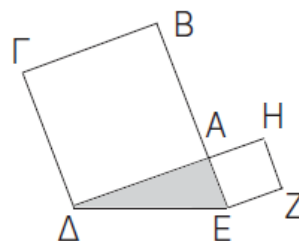
ΟΜΑΔΑ Β

B1) Να αποδείξετε ότι

α) $3^{77} + 3^{77} + 3^{77} = 3^{78}$ β) $2^{102} - 2^{101} - 2^{100} = 2^{100}$

γ) $2^{59} - 4^{29} = 2^{58}$ δ) $2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17} = 6^{17}$

B2) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 80cm^2 και του ΑΕΖΗ, 45cm^2 , να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ είναι $12\sqrt{5}$.



B3) α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

β) Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha\beta = -\frac{7}{3}$,

να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

$K = \alpha^2 + \beta^2$, $\Lambda = \alpha^4 + \beta^4 - 3\alpha - 3\beta + 2\alpha^2\beta^2$ και $M = (3\alpha - 1)^2 + (3\beta - 1)^2 + 9(\alpha + \beta)$

B4) α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$:

β) Αν $x + \frac{1}{x} = 3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x^3 + \frac{1}{x^3}$

B5) Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α , β ισχύει $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$,

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

B6) Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha^2 - \beta^2 = -10\beta + 25$

να αποδείξετε ότι $\alpha - \beta = -5$ ή $\alpha + \beta = 5$

B7) Να αποδείξετε ότι:

$$(2x - 1)^3 + 3(2x - 1)^2(2x + 1) + 3(2x - 1)(2x + 1)^2 + (2x + 1)^3 = 64x^3$$

B8) Να αποδείξετε ότι : $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$

B9) Να λύσετε την εξίσωση : $2(x - 1)(x^2 - 4) = 5(x - 1)(x - 2)^2$

B10) Δίνεται η παράσταση $K = x(2x+3)^2 - 3(x - 3)(x+3) + 3x^2$

α) Να αποδείξετε ότι $K = 4x^3 + 12x^2 + 9x + 27$

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση K

γ) Για ποιες τις τιμές του x ισχύει $K = 0$

B11) Δίνεται η παράσταση $\Lambda = (\alpha - 2)^3 - \alpha + 2$

α) Να αποδείξετε ότι $\Lambda = \alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6$

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Λ

γ) Για ποιες τις τιμές του α ισχύει $\Lambda = 0$;

B12) Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τον κύκλο με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA . Αν η ευθεία $B\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και E , να αποδείξετε ότι $AB^2 = BD \cdot BE$

B13) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200}$

B14) Δίνεται το κλάσμα $K = \frac{2x^3 - 3x^2 + 32x - 48}{2x^3 - 3x^2}$

α) Να παραγοντοποιήσετε τον αριθμητή του κλάσματος K

β) Να παραγοντοποιήσετε τον παρονομαστή του κλάσματος K

γ) Για ποιες τιμές της μεταβλητής x ορίζεται το κλάσμα K ;

δ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα K και στη συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές του x γίνεται ίσο με 5

B15) α) Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση $A = \frac{x-3}{x} + \frac{6}{x-3} - \frac{18}{x^2-3x}$

β) Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση $B = \frac{3x}{4x-8} : \frac{x^2}{x-2}$

γ) Να αποδείξετε ότι για όλες τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A και B ισχύει $A - 4B = 1$

B16) α) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = \frac{8}{\alpha^2 - 2\alpha} + \frac{\alpha - 2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha - 2}$$

β) Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση A

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του α η παράσταση A γίνεται ίση με 2.

B17)

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ τριγώνου ABΓ ισχύει $\frac{\beta}{\alpha + \gamma} - \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = 0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

B18) Να αποδείξετε ότι: $\frac{x^2 + y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2$

Επιμέλεια : Μιχάλης Χατζάκης