2ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΜΙΚΡΑΣ **ΣΧ.ΕΤΟΣ 2021-2022**

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ : ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ Α

Α1) Η εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$ είναι δευτέρου βαθμού :

Α. για όλες τις τιμές των α , β , γ Β. μόνο όταν α = 0 Γ . μόνο όταν $α \neq 0$

Α2) Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$ με , $α \neq 0$

τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα

από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $Δ > 0$	1. Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση
β. $Δ = 0$	2. Η εξίσωση δεν έχει λύση
γ. $Δ \geqslant 0$	3. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις
δ. $Δ < 0$	4. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση .

α.	β.	γ.	δ.
3	4	1	2

A3) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση της στήλης (Α) το πλήθος των λύσεων της από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\chi^2 + 10\chi + 6 = 0$	1. Η εξίσωση δεν έχει λύση
β. $4\chi^2 - 4\chi + 1 = 0$	2. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις
γ. $\chi^2 + \chi + 10 = 0$	3. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση

α.	β.	γ.

α) $x^2 + 10x + 6 = 0$

$a = 1,\ \beta = 10,\ \gamma = 6$

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 100 - 24 = 76$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις γιατί $\Delta > 0$

β) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$a = 4,\ \beta = -4,\ \gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση γιατί $\Delta = 0$

γ) $x^2 + x + 10 = 0$

$a = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 10$

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 1 - 40 = -39$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση

α	β	γ
2	3	1

A4) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση της στήλης (Α) το πλήθος των λύσεων της από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\chi+3=0$	1. Η εξίσωση είναι αδύνατη
β. $\chi^2+3=0$	2. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις
γ. $\chi^2-3=0$	3. Η εξίσωση έχει μία λύση
δ. $3\chi=0$	4. Η εξίσωση έχει τρεις λύσεις
ε. $0\chi=0$	5. Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις
στ. $0\chi=3$	
ζ. $\chi(\chi^2-3)=0$	

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.

Α4

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ
3	1	2	3	5	1	4

A5) Η παράσταση : $\frac{1}{x}-\frac{x-5}{x^2-4}$ ορίζεται αν :

Α. $x\neq 0$ και $x\neq 5$ Β. $x\neq 0$ και $x\neq 2$ και $x\neq -2$ Γ. $x\neq 0$ και $x\neq 2$

$\frac{1}{x}-\frac{x-5}{x^2-4}$

πρέπει $\boxed{x\neq 0}$ και $x^2-4\neq 0$

$\boxed{x\neq 2}$ και $\boxed{x\neq -2}$

Το σωστο ειναι το Β)

A6) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος.

α) Αν ρ_1 και ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με , $\alpha\neq 0$ τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x+\rho_1)(x+\rho_2)$ Σ **(Λ)**

β) Η εξίσωση $(3\chi-1)^2 = 9\chi(\chi+1)$ είναι 2ου βαθμού. Σ **(Λ)**

γ) Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2>0$ Σ **(Λ)**

δ) Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2+1>0$ **(Σ)** Λ

ε) Αν $\alpha\beta=0$, τότε υποχρεωτικά $\beta=0$ Σ **(Λ)**

στ) Αν $(\alpha^2+1)\beta=0$, τότε υποχρεωτικά $\beta=0$ **(Σ)** Λ

ζ) Αν $x(x-3)\neq 0$, τότε $x\neq 0$ ή $x\neq 3$ Σ **(Λ)**

η) Αν $\alpha(\beta-1) = \gamma(\beta-1)$, τότε υποχρεωτικά $\alpha = \gamma$ Σ **(Λ)**

θ) Αν $\alpha(\beta^4+2) = \gamma(\beta^4+2)$, τότε υποχρεωτικά $\alpha = \gamma$ **(Σ)** Λ

ι) Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $\frac{x(x-1)}{x-1}=x$ Σ **(Λ)**

A7) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος.

α) Αν $\alpha > \beta$ και γ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός , τότε $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$ Σ Λ

β) Αν $\alpha > \beta$ και γ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός , τότε $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$ Σ Λ

γ) Αν $\alpha > \beta$ και γ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός , τότε $\alpha\gamma>\beta\gamma$ Σ Λ

δ) Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma<0$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$ Σ Λ

ε) Αν $\alpha\gamma<\beta\gamma$ και $\gamma<0$, τότε $\alpha>\beta$ Σ Λ

στ) Αν $\alpha<0<\beta$, τότε το γινόμενο $\alpha\beta(\beta-\alpha)$ είναι θετικό Σ Λ

ζ) Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$, τότε $\alpha-\gamma > \beta-\delta$ Σ Λ

η) Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$, τότε $\alpha+\gamma > \beta+\delta$ Σ Λ

θ) Αν $\alpha>\beta>0$ και $\gamma>\delta>0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$ Σ Λ

ι) Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\delta}$ Σ Λ

α) Σ στ) Λ
β) Σ ζ) Λ
γ) Λ η) Σ
δ) Λ θ) Σ
ε) Σ ι) Λ

A8) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος.

α) Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha + 3 > 0$ Σ Λ

β) Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha - 4 < 0$ Σ Λ

γ) Αν $\beta < 0$, τότε $\beta + 5 > 0$ Σ Λ

δ) Αν $\beta < 0$, τότε $\beta - 3 < 0$ Σ Λ

ε) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$ Σ Λ

στ) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha - \beta > 0$ Σ Λ

ζ) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha\beta(\alpha - \beta) < 0$ Σ Λ

η) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\dfrac{\alpha+2}{-2\beta} > 0$ Σ Λ

α) Σ ε) Λ
β) Λ στ) Σ
γ) Λ ζ) Σ
δ) Σ η) Σ

A9) Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $x - 2(3x - 1) = 0$ β) $(x - 2) - (3x - 1) = 0$

γ) $(x - 2)(3x - 1) = 0$ δ) $(x - 2)(3x - 1) = 22$

α) $x - 2(3x-1) = 0$
$x - 6x + 2 = 0$
$-5x + 2 = 0$
$\frac{5x}{5} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}}$

β) $(x-2) - (3x-1) = 0$
$(x-2) - 3x + 1 = 0$
$x - 2 - 3x + 1 = 0$
$-2x - 1 = 0$
$\boxed{x = \frac{-1}{2}}$

γ) $(x-2)(3x-1) = 0$
$x - 2 = 0$ ή $3x - 1 = 0$
$\boxed{x = 2}$ ή $\boxed{x = \frac{1}{3}}$

δ) $(x-2)(3x-1) = 22$
$3x^2 - x - 6x + 2 = 22$
$3x^2 - 7x + 2 - 22 = 0$
$3x^2 + 5x - 12x - 20 = 0$
$x(3x+5) - 4(3x+5) = 0$
$(3x+5)(x-4) = 0$
$3x + 5 = 0$ ή $x - 4 = 0$
$\boxed{x = -\frac{5}{3}}$ ή $x = 4$

A10) Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $x^2 = 9$ β) $x^2 = -9$

γ) $x^2 - 3x = 0$ δ) $x^2 - 3x = 4$ ε) $(x+1)^2 = 2x - 15$ στ) $y(y-3) = 4y$

ζ) $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$ η) $\dfrac{(\alpha - 3)^2}{8} = 2$

α) $x^2 = 9$ άρα $\boxed{x = 3}$ ή $\boxed{x = -3}$

β) $x^2 = -9 \rightarrow$ $\boxed{\text{αδύνατη}}$

γ) $x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$\boxed{x = 0}$ ή $x - 3 = 0$

$\boxed{x = 3}$

δ) $x^2 - 3x = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\alpha = 1,\ \beta = -3,\ \gamma = -4$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$ $\rightarrow \dfrac{8}{2} = \boxed{4}$, $\rightarrow \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

ε) $(x+1)^2 = 2x - 15$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 2x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x} + 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 16 = 0 \rightarrow$ $\boxed{\text{αδύνατη}}$

ζ) $(2\omega-3)^2-(\omega-2)^2=2\omega^2-11$

$\Leftrightarrow (4\omega^2-12\omega+9)-(\omega^2-4\omega+4)-2\omega^2+11=0$

$\Leftrightarrow 4\omega^2-12\omega+9-\omega^2+4\omega-4-2\omega^2+11=0$

$\Leftrightarrow 4\omega^2-\omega^2-2\omega^2-12\omega+4\omega+9-4+11=0$

$\Leftrightarrow \omega^2-8\omega+16=0 \quad (\omega-4)^2$

$\Leftrightarrow (\omega-4)^2=0$

$\boxed{\omega=4}$

η) $\dfrac{(a-3)^2}{8}=2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2-6a+9}{8}=2$

$\Leftrightarrow \cancel{8}\cdot\dfrac{a^2-6a+9}{\cancel{8}}=8\cdot 2$

$\Leftrightarrow a^2-6a+9=16$

$\Leftrightarrow a^2-6a+9-16=0$

$\Leftrightarrow a^2-6a-7=0$

$a=1,\ \beta=-6,\ \gamma=-7$

$\Delta=\beta^2-4a\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot(-7)=36+28=64$

$\alpha=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm8}{2}\begin{cases}\dfrac{14}{2}=\boxed{7}\\[4pt]\dfrac{-2}{2}=\boxed{-1}\end{cases}$

2ος τρόπος

$\dfrac{(\alpha-3)^2}{8}=2 \Leftrightarrow (\alpha-3)^2=2\cdot8=16$

Οπότε

$(\alpha-3)=4$ ή $(\alpha-3)=-4$

$\alpha=4+3=7$ ή $\alpha=-4+3=-1$

A11) Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $x^2(x-5)-4x(x-5)+4x-20=0$

β) $x^3+2x^2-9x-18=0$ γ) $(2-x)^3=1-x^3-3(2-5x)-9$

α) $x^2(x-5)-4x(x-5)+4x-20=0$

$x^2(x-5)-4x(x-5)+4(x-5)=0$

$(x-5)(x^2-4x+4)=0$

$x-5=0$ ή $x^2-4x+4=0$

$x=5$ ή $x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=0$

$(x-2)^2=0$

$x-2=0$

$x=2$

β) $x^3+2x^2-9x-18=0$

$x^2(x+2)-9(x+2)=0$

$(x+2)(x^2-9)=0$

$x+2=0$ ή $x^2-9=0$

$x=-2$ ή $x^2=9$

$x=\sqrt{9}$ ή $x=-\sqrt{9}$

$x=3$ ή $x=-3$

γ) $(2-x)^3 = 1 - x^3 - 3(2-5x) - 9$

$2^3 - 3\cdot 2^2\cdot x + 3\cdot 2\cdot x^2 - x^3 = 1 - x^3 - 6 + 15x - 9$

$8 - 12x + 6x^2 - x^3 = -x^3 + 15x - 14$

$8 - 12x + 6x^2 - x^3 + x^3 - 15x + 14 = 0$

$6x^2 - 27x + 22 = 0$ $\quad \alpha = 6 \;,\; \beta = -27 \quad \gamma = 22$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-27)^2 - 4\cdot 6\cdot 22 = 729 - 528 = 201 > 0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις , $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{201}}{2\cdot 6} = \frac{27 \pm \sqrt{201}}{12}$

A12) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων : $-3x+4 > x-4$ και $2x - 3 \le \frac{3x-1}{2} - 5$

$-3x+4 > x-4$

$-3x-x > -4-4$

$\frac{-4x}{-4} < \frac{-8}{-4}$

$\boxed{x<2}$

$2x-3 \le \frac{3x-1}{2} - 5$

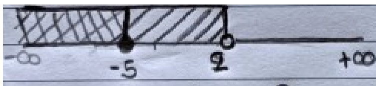
$2\cdot 2x - 2\cdot 3 \le \cancel{2}\cdot\frac{3x-1}{\cancel{2}} - 2\cdot 5$

$4x-6 \le 3x-1-10$

$\Leftrightarrow 4x-6 \le 3x-11$

$4x-3x \le -11+6$

$\boxed{x \le -5}$



Κοινές λύσεις : $x \le -5$

A13) Αν $2 < x < 7$ και $-8 < y < 4$ να βρείτε τους αριθμούς μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης : $2x - 3y - 12$

$2 < x < 7$

$2\cdot 2 < 2\cdot x < 2\cdot 7$

$4 < 2x < 14$ (1)

$-8 < y < 4$

$-3\cdot(-8) > -3\cdot y > 4\cdot(-3)$

$-12 < -3y < 24$

$-12-12 < -3y-12 < 24-12$

$-24 < -3y-12 < 12$ (2)

προσθέτω τις σχέσεις (1), (2)

$4-24 < 2x-3y-12 < 14+12$

$-20 < 2x-3y-12 < 26$

A14) Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$

$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 - \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha - \alpha\beta + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(1-\beta) - (1-\beta) > 0$

$\Leftrightarrow (1-\beta)(\alpha-1) > 0$ ισχύει γιατί από την

υπόθεση έχουμε $1 > \beta$ και $\alpha > 1$ οπότε $1-\beta > 0$ και $\alpha - 1 > 0$

A15) Να αποδείξετε ότι $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 \geq 4(\alpha x+\beta y)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

A15) $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 \geq 4(\alpha x + \beta y)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 + 2\beta y + \beta^2 \geq 4\alpha x + 4\beta y$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 + 2\beta y + \beta^2 - 4\alpha x - 4\beta y \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει γιατί

$(x-\alpha)^2 \geq 0$ και $(y-\beta)^2 \geq 0$

• Η ισότητα: $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$, ισχύει όταν

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0$, η οποία αφού $(x-\alpha)^2 \geq 0$ και $(y-\beta)^2 \geq 0$

ισχύει μόνο όταν $(x-\alpha)^2 = 0$ και $(y-\beta)^2 = 0$

δηλαδή όταν $x = \alpha$ και $y = \beta$

ΟΜΑΔΑ Β

Β1) Να λύσετε την εξίσωση $4x^2 + αx + 9 = 0$ αν είναι γνωστό ότι μια λύση της είναι το $x = -\frac{1}{2}$

Το $x = -\frac{1}{2}$ είναι λύση της εξίσωσης $4x^2 + αx + 9 = 0$ και επομένως θα την επαληθεύει .

Οπότε $4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + α\left(-\frac{1}{2}\right) + 9 = 0$

$$4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{α}{2} + 9 = 0 \quad ή \quad 10 - \frac{α}{2} = 0 \quad ή \quad \frac{α}{2} = 10 \quad ή\ α = 20 .$$

Επομένως η εξίσωση γράφεται $4x^2 + 20x + 9 = 0$.

$α = 4$, $β = 20$, $γ = 9$. $Δ = β^2 - 4αγ = 20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 400 - 144 = 256 > 0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις , $x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-20 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 4} = \frac{-20 \pm 16}{8}$

$$x = \frac{-20+16}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \quad ή \quad x = \frac{-20-16}{8} = \frac{-36}{8} = -\frac{9}{2}$$

Β2) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

$Δ = b^2 - 4 α \cdot γ = [-(1-2\sqrt{2})]^2 - 4 α \cdot γ$

$= +(1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} + 2^2 \sqrt{2}^2) - 4 \cdot 1(-\sqrt{2})$

$= 1 - 4\sqrt{2} + 4 \cdot 2 + 4\sqrt{2} = 9$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{Δ}}{2α} = \frac{1-2\sqrt{2}-3}{2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1-\sqrt{2})}{2} = -1-\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{Δ}}{2 \cdot α} = \frac{1-2\sqrt{2}+3}{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$

Β3) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - x - 6}$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο : $x^2 - x - 6$

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και στη συνέχεια

να αποδείξετε ότι αν $-2 < x < 0$, τότε η παράσταση Α είναι θετικός αριθμός .

α) $x^2 - x - 6$

Δ: $a=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-6$

Δ: $\beta^2 - 4a\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 1 + 24 = 25$

$25 > 0$, Άρα :

$x = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ή $x = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\cdot(1)}$ ή $x = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\cdot(1)}$

$x = \frac{1+5}{2}$ ή $x = \frac{1-5}{2}$

$x = \frac{6}{2} = 3$ ή $x = \frac{-4}{2} = -2$

Άρα :

$x^2 - x - 6 = 1(x-3)(x-(-2)) = (x-3)(x+2)$

β) $A = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{(x-3)(x+2)} =$

$\frac{x(x^2 - 6x + 9)}{(x-3)(x+2)} =$

$\frac{x(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}(x+2)} =$

$\frac{x(x-3)}{(x+2)}$ Άρα $A = \frac{x(x-3)}{x+2}$

Αν $-2 < x < 0$ έχουμε : $-2 < x$ και $x < 0$

Άρα $x + 2 > 0$ και $x(x-3) > 0$, γιατί

$x < 0$ κ $x - 3 < 0$

Οπότε το κλάσμα $A = \frac{x(x-3)}{x+2}$ είναι θετικό ,

γιατί οι όροι του $x(x-3)$ και $x+2$ είναι θετικοί

B4) α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $Α = χ^2 + 2χ - χψ - 2ψ$

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο : $Β = χ^2 - χ - 6$

γ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{Α}{Β}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι , αν $ψ > χ > 3$, τότε το κλάσμα $\frac{Α}{Β}$ είναι αρνητικός αριθμός .

α) $Α = χ^2 + 2χ - χψ - 2ψ$ $= χ(χ+2) - ψ(χ+2)$ $= (χ+2)(χ - ψ)$ γ) $\frac{Α}{Β} = \frac{(χ+2)(χ-ψ)}{(χ-3)(χ+2)} = \frac{χ-ψ}{χ-3}$ Αν $ψ > χ > 3$ είναι $ψ > χ$ και $χ > 3$. Άρα $χ - ψ < 0$ και $χ - 3 > 0$. Οπότε το κλάσμα $\frac{Α}{Β} = \frac{χ-ψ}{χ-3}$ είναι αρνητικό .	β) $Β = χ^2 - χ - 6$ $α = 1$, $β = -1$ $γ = -6$ $Δ = β^2 - 4αγ = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$ Άρα η εξίσωση $χ^2 - χ - 6 = 0$ έχει δύο λύσεις τις , $x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$ $x = \frac{1+5}{2} = 3$ ή $x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ Οπότε το τριώνυμο $Β = χ^2 - χ - 6$ γράφεται : $Β = χ^2 - χ - 6 = 1 \cdot (χ - 3) \cdot [χ - (-2)]$ $= (χ - 3)(χ+2)$

B5) Δίνεται το κλάσμα : $A = \dfrac{x^3 - x + 4x^2 - 4}{x^2 + 5x + 4}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + 5x + 4 = 0$

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα A ;

γ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα A και στη συνέχεια να βρείτε ,αν υπάρχει , την τιμή του x για την οποία είναι γ1) $A = 2$ γ2) $A = -2$

α) $x^2+5x+4=0$

$\alpha=1, \beta=5, \gamma=4$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = (5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4$

$\Delta = 25-16 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(5) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \dfrac{-5\pm 3}{2}$ → $\dfrac{-5+3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ → $\dfrac{-5-3}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$

β) Πρέπει $x^2+5x+4 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq -1}$ και $\boxed{x \neq -4}$

γ) $A = \dfrac{x(x^2-1)+4(x^2-1)}{(x+1)\cdot(x+4)} = \dfrac{(x^2-1)\cancel{(x+4)}}{(x+1)\cancel{(x+4)}}$

$= \dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = (x-1)$

γ1) $A=2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=2+1 \Leftrightarrow x=3$ δεκτή

γ2) $A=-2 \Leftrightarrow x-1=-2 \Leftrightarrow x=-2+1=-1$ που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

(Δηλαδή δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία ισχύει $A=-2$)

B6) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση $x^2 + 4λx - 1 = 0$ έχει δύο άνισες λύσεις.
Η εξίσωση $x^2 + 4λx - 1 = 0$ είναι 2ου βαθμού με α = 1 , β = 4λ , γ = – 1 και διακρίνουσα $Δ = β^2 – 4αγ = (4λ)^2 – 4·1·(– 1) = 16λ^2 +4$ Επειδή $16λ^2 \geq 0$, προκύπτει ότι $16λ^2 + 4 \geq 4 > 0$ δηλαδή η διακρίνουσα $Δ = 16λ^2 +4$ είναι θετική για οποιαδήποτε τιμή του λ . Επομένως για κάθε τιμή του λ η εξίσωση $x^2 + 4λx - 1 = 0$ έχει δύο άνισες λύσεις

B7) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + x – 1+3λ = 0$ (1)

Να βρείτε τις τιμές του λ ,για τις οποίες η εξίσωση (1)

α) έχει δύο άνισες λύσεις. β) έχει μία διπλή λύση

γ) δεν έχει λύση δ) έχει μία τουλάχιστον λύση

ΛΥΣΗ: $α=1$ $β=1$ $γ=-1+3λ$

α) $Δ>0 \Leftrightarrow 1-4\cdot1(-1+3λ)>0$

$\Leftrightarrow 1+4-12λ>0$

$5-12λ>0$

$\frac{-12λ}{-12} < \frac{-5}{-12}$

$λ < \frac{5}{12}$

β) $Δ=0 \Leftrightarrow 5-12λ=0$

$λ=\frac{5}{12}$

γ) $Δ<0$ $5-12λ<0$

$λ > \frac{5}{12}$

δ) $Δ\geq0 \Leftrightarrow 5-12λ\geq0$

$λ\leq\frac{5}{12}$

B8) Να βρείτε τις τιμές του λ ,για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + (3\lambda-1)x + 1 = 0$ έχει μία διπλή λύση.

$\Delta = 0$ | $\alpha = 1$, $\beta = 3\lambda - 1$, $\gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = (3\lambda - 1)^2 - 4 = 0$

$\Delta = (3\lambda)^2 - 2\cdot 3\lambda \cdot 1 + 1^2 - 4 = 0$

$\Delta = 9\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0$

$$\frac{9\lambda^2}{3} - \frac{6\lambda}{3} - \frac{3}{3} = \frac{0}{3}$$

$\Delta = 3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -1$

$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-1)$

$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$\lambda_1 = \frac{2+4}{6} = 1 \quad ή \quad \lambda_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6}$$

B9) Αν για τις πλευρές α , β και γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει

$2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha(\beta+\gamma)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Έχουμε : $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha(\beta+\gamma)$ ή $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma$

ή $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = 0$

ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 = 0$

ή $(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 = 0$ (1).

Επειδή $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ και $(\alpha-\gamma)^2 \geq 0$, η παραπάνω ισότητα (1) ισχύει μόνο όταν

$(\alpha-\beta)^2 = 0$ και $(\alpha-\gamma)^2 = 0$. Επομένως προκύπτει ότι

$\alpha - \beta = 0$ και $\alpha - \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta$ και $\alpha = \gamma$.

Άρα $\alpha=\beta=\gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α , β και γ είναι ισόπλευρο.

B10) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $\frac{3\alpha-\beta}{2} < \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$

B10) $\frac{3\alpha-\beta}{2} < \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\Leftrightarrow \cancel{2}\cdot\frac{3\alpha-\beta}{\cancel{2}} < 2\alpha < \cancel{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow 3\alpha-\beta < 2\alpha < \alpha+\beta$

$\Leftrightarrow 3\alpha-\beta < 2\alpha$ και $2\alpha < \alpha+\beta$

$\Leftrightarrow 3\alpha-\beta-2\alpha < 0$ και $2\alpha-\alpha-\beta < 0$

$\Leftrightarrow \alpha-\beta < 0$ και $\alpha-\beta < 0$

ισχύει ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha < \beta$